EXAMEN DE GEOMETRÍA ANALÍTICA

1. Dado el punto **A(3,-1)** y la recta **r:2x-3y+4=0**.
a) Halla la ecuación de una recta paralela a **r** y que pase por **A**.
b) Halla la ecuación de una recta perpendicular a **r** y que pase por **A**. (2 puntos)

2. Halla el simétrico del punto **A(-2,0)** respecto de la recta r: **x+2y-3=0**.
(2 puntos)

3. Halla el ángulo α que forman las rectas $\begin{array}{l} r \equiv 3x-4y+7=0 \\ s \equiv 12x+5y-5=0 \end{array}$ (1 punto)

4. Dados los puntos A(-1,3), B(1,1) y C(-3,-2)
a) Halla la ecuación de la mediatriz del segmento AB.
b) Halla la ecuación de una recta que sea paralela a AB y pase por el punto C.
(2 puntos)

5. Dado el triángulo de vértices A(-2,1), B(5,4), C(2,-3)
a) Halla su área.
b) Halla su perímetro. (2 puntos)

6. Comprueba si el cuadrilátero ABCD es un paralelogramo, siendo A(5,1), B(1,2), C(3,4) y D(7,3). (1 punto)

SOLUCIONES

1. Dado el punto **A(3,-1)** y la recta **r:2x-3y+4=0**.

a) Halla la ecuación de una recta paralela a **r** y que pase por **A**.

Pendiente de r: $m=\frac{2}{3}$, si es paralela, la pendiente es la misma.

Ecuación punto pendiente: $y=y_0+m(x-x_0)\rightarrow y=-1+\frac{2}{3}(x-3)$

La ecuación de la recta pedida es: $y=\frac{2}{3}x-3$

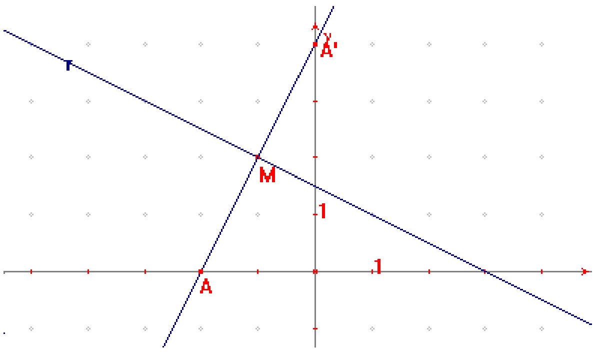
b) Halla la ecuación de una recta perpendicular a **r** y que pase por **A**.

Pendiente de una recta perpendicular: $m=-\frac{3}{2}$

Ecuación punto pendiente: $y=y_0+m(x-x_0)\rightarrow y=-1-\frac{3}{2}(x-3)$

La ecuación de la recta pedida es: $y=-\frac{3}{2}x+\frac{7}{2}$

2. Halla el simétrico del punto **A(-2,0)** respecto de la recta r: **x+2y-3=0**.



Recta dada en forma explícita:

$2y=-x+3\rightarrow y=-\frac{1}{2}x+\frac{3}{2}\rightarrow m=-\frac{1}{2}$

la recta perpendicular tendrá m = 2

Y pasa por el punto A, es decir, que su ecuación es:

$y=0+2(x+2)\rightarrow y=2x+4$

La intersección de las dos rectas es el punto M, resolviendo el sistema:

$$\left.\begin{array}{l}x+2y-3=0\\ y=2x+4\end{array}\right\}\rightarrow x+2(2x+4)-3=0\rightarrow 5x+5=0\rightarrow\left\langle\begin{array}{l}x=-1\\ y=2\end{array}\right. \quad M(-1,2)$$

este M es el punto medio del segmento AA', siendo A(-2,0) y A'(x,y)

$$M(-1,2)=\left(\frac{-2+x}{2},\frac{0+y}{2}\right)\rightarrow -1=\frac{-2+x}{2};\ 2=\frac{y}{2}\rightarrow x=0, y=4\rightarrow A'(0,4)$$

3. Halla el ángulo α que forman las rectas $\begin{array}{l}r\equiv 3x-4y+7=0\rightarrow\vec{n}(3,-4)\\ s\equiv 12x+5y-5=0\rightarrow\vec{n}'(12,5)\end{array}$

$$\cos\alpha=\cos(\vec{n},\vec{n}')=\frac{|\vec{n}\cdot\vec{n}'|}{|\vec{n}||\vec{n}'|}=\frac{|3\cdot 12-4\cdot 5|}{\sqrt{3^2+(-4)^2}\sqrt{12^2+5^2}}=\frac{16}{5\cdot 13}\rightarrow\alpha=75^{\circ}45'$$

4. Dados los puntos A(-1,3), B(1,1) y C(-3,-2)

a) Halla la ecuación de la mediatriz del segmento AB.

Necesitamos hallar el punto medio de AB, $M \to M\left(\frac{-1+1}{2}, \frac{3+1}{2}\right) = (0,2)$, la mediatriz pasa por M y es perpendicular a la recta AB, cuya pendiente es: $m = \frac{1-3}{1+1} = -1$, luego la pendiente de la mediatriz será 1 (inversa y opuesta), la ecuación de la recta pedida será: $y = 2 + 1(x-0) \to y = 2 + x$

b) Halla la ecuación de una recta que sea paralela a AB y pase por el punto C.
Si es paralela a AB, su pendiente es la misma, es decir m = -1, y pasa por C:
$y = -2 - 1(x+3) \to y = -x - 5$

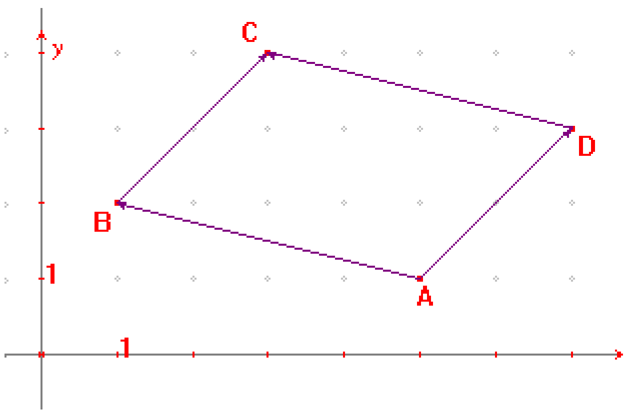
5. Dado el triángulo de vértices A(-2,1), B(5,4), C(2,-3)
a) Halla su área. Necesitamos una base y la altura correspondiente: base AB y la altura será la distancia de C a AB.
Ecuación de AB: $m = \frac{4-1}{5+2} = \frac{3}{7} \to y = 1 + \frac{3}{7}(x+2) \to y = \frac{3}{7}x + \frac{13}{7}$ en forma implícita: $7y = 3x + 13 \to 3x - 7y + 13 = 0$

Base = $d(A,B) = \sqrt{(5+2)^2 + (4-1)^2} = \sqrt{58}\,u$

Altura = $d(C,AB) = \frac{|3 \cdot 2 - 7(-3) + 13|}{\sqrt{3^2 + (-7)^2}} = \frac{40}{\sqrt{58}}u \to A = \frac{\sqrt{58} \cdot \frac{40}{\sqrt{58}}}{2} = 20\,u^2$

b) Halla su perímetro. $P = d(A,B) + d(B,C) + d(C,A)$
$d(B,C) = \sqrt{(2-5)^2 + (-3-4)^2} = \sqrt{58}\,u$
$d(A,C) = \sqrt{(2+2)^2 + (-3-1)^2} = \sqrt{32}\,u \to P = \sqrt{58} + \sqrt{58} + \sqrt{32} = 2\sqrt{58} + \sqrt{32}\,u$

6. Comprueba si el cuadrilátero ABCD es un paralelogramo, siendo A(5,1), B(1,2), C(3,4) y D(7,3). Para que sea un paralelogramo los lados no adyacentes tienen que ser paralelos, es decir que, tiene que ser: $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$ y $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AD}$, lo comprobamos:



$\overrightarrow{AB} = (1-5, 2-1) = (-4,1)$
$\overrightarrow{DC} = (3-7, 4-3) = (-4,1)$
$\overrightarrow{BC} = (3-1, 4-2) = (2,2)$
$\overrightarrow{AD} = (7-5, 3-1) = (2,2)$
Comprobado, es un paralelogramo